Wyuczalność w teorii modeli

Nina Gierasimczuk

Instytut Filozofii UW
&
Institute for Logic, Language, and Computation UvA

Forum Kognitywistyczne
26 IV 2008

Plan

PLAN

PLAN

PLAN

1. WPROWADZENIE
2. PERSPEKTYWA TEORIO-MODELOWA
3. IDENTYFIKOWALNOŚĆ W TEORII MODELI
4. PORÓWNANIE Z PARADYGMATEM NUMERYCZNYM

Zakres problematyki

- Modelowanie procesu uczenia się.
- Modelowanie badań naukowych.
- Indukcyjne rozumowania.
- Wspólny model identyfikacji w granicy.

Uczenie się semantyki a badania naukowe

- Uczenie się semantyki.
  - Odkrywanie znaczeń słów.
  - Odkrywanie znaczeń zdań.
- Badania naukowe
  - Teoria jakiegoś zjawiska.
  - Potwierdzanie hipotez i ich odrzucanie.
- Uczeń i naukowiec wysuwają hipotezy – w którym ze zbiorów możliwych światów mieści się ich świat.
- Wspólnota interesów?

- Ubóstwo paradygmatu numerycznego.
- Możliwe światy jako zbiory liczb naturalnych vs struktury pierwszego rzędu.
- Dane jako ciągi liczb vs formuły atomowe i ich negacje.
- Ubóstwo paradygmatu dla struktur pierwszego rzędu.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- **Sym** – zbiór predykatów, symboli funkcyjnych i stałych;
- $Var = \{v_i | i \in \mathbb{N}\}$ – przeliczalny zbiór zmiennych;
- L_{form} – zbiór formuł;
- $L_{basic} \subseteq L_{form}$ – zbiór formuł atomowych i ich negacji;
- L_{sen} – zbiór zdań.

- $\mathcal{S}$ – struktura pierwszego rzędu.
- $\mathcal{S}$ jest modelem dla $\Gamma \subseteq L_{form}$, jeśli istnieje wartościowanie $h : Var \longrightarrow |S|$ takie, że $S \models \Gamma[h]$.
- $MOD(\Gamma)$ – klasa modeli dla $\Gamma \subseteq L_{form}$.

DWA BARDZO WAŻNE USTALENIA

1. **Sym** składa się z przeliczalnie wielu predykatów symboli funkcyjnych i stałych. **Sym** jest rozstrzygalny.
2. Ograniczamy się do przeliczalnych struktur, które interpretują zbiór **Sym**.

- Światy – przeliczalne struktury interpretujące **Sym**.
- Problem – klasa hipotez, hipoteza – klasa struktur.

PRZYKŁAD

Niech **Sym**$= \{P\}$, gdzie P – predykat jednoargumentowy.
P_0 – klasa ostrych porządków z najmniejszym elementem,
P_1 – klasa ostrych porządków bez najmniejszego elementu.
Wtedy $\{P_0, P_1\}$ to problem.

Definicja

Pełne przyporządkowanie dla struktury $\mathcal{S}$ to $f : Var \xrightarrow{na} |\mathcal{S}|$.

Definicja

Niech h będzie pełnym przyporządkowaniem dla $\mathcal{S}$.

- *Środowisko dla $\mathcal{S}$ i h to ciąg ε taki, że*

$$range(\varepsilon) = \{\beta \in L_{basic} | \mathcal{S} \models \beta[h]\}.$$

- *Środowisko dla $\mathcal{S}$ to środowisko dla $\mathcal{S}$ oraz pełnego h.*
- *Środowisko to środowisko dla pewnej struktury.*
- *Środowisko dla hip. P to środowisko dla pewnej $\mathcal{S} \in P$.*
- *Środowisko dla probl. $\mathbf{P}$ to środowisko dla pewnej $P \in \mathbf{P}$.*

Przykład

Sym $= R$, R – predykat dwuargumentowy; model $\mathcal{S} = (\mathbb{N}, <)$.
Dla $h = \{(v_i, i) | i \in \mathbb{N}\}$:

$$v_3 \neq v_4 \;\; \neg Rv_0v_0 \;\; Rv_1v_9 \;\; v_9 = v_9 \;\; Rv_7v_8 \;\; v_0 \neq v_3 \;\; v_5 = v_5 \;\; \ldots$$

Dla $g = \{(v_{2i}, i), (v_{2i+1}, i) | i \in \mathbb{N}\}$:

$$v_2 = v_3 \;\; \neg Rv_4v_5 \;\; Rv_1v_9 \;\; v_9 = v_9 \;\; Rv_7v_{19} \;\; v_0 \neq v_3 \;\; \neg Rv_{33}v_2 \;\; \ldots$$

LEMAT

1. *Jeśli struktury $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ są izomorficzne, to zbiory środowisk dla $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ są identyczne.*
2. *Jeśli pewne środowisko jest dla obu struktur $\mathcal{S}$ oraz $\mathcal{T}$ to $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ są izomorficzne.*

DEFINICJA

Niech SEQ – przeliczalny zbiór wszystkich niesprzecznych skończonych ciągów nad L_{basic}.
Uczony *to częściowa funkcja:*

$$\Psi : SEQ \longrightarrow \mathbf{P}.$$

Inaczej: jeśli uczony Ψ jest zdefiniowany na $\sigma \in SEQ$, to wtedy $\Psi(\sigma)$ jest klasą modeli (hipotezą).
Intuicyjnie: skonfrontowany z σ, Ψ *wierzy*, że $\Psi(\sigma)$.

Definicja

Niech Ψ *– uczony,* ε *– środowisko dla hipotezy* P.

1. Ψ *identifikuje* P *na* ε *jeśli*

$$\exists k\ \forall n > k\ \emptyset \neq \Psi(e[n]) \subseteq P.$$

2. Ψ *identyfikuje* P *jeśli identyfikuje* P *na wszystkich* ε *dla* P.
3. Ψ *identyfikuje problem* $\mathbf{P}$, *jeśli identyfikuje wszystkie* $P \in \mathbf{P}$.

PRZYKŁAD

Sym $= \{H\}$, H – predykat jednoargumentowy.
Dla $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \{\mathcal{S} | card(H^{\mathcal{S}}) = n\}$. Niech $\mathbf{P} = \{P_n | n \in \mathbb{N}\}$.
Problem **P** jest identyfikowalny.

PRZYKŁAD

Sym $= \{R\}$, R – relacja dwuargumentowa.
$P_y = \{\langle \mathbb{N}, \prec \rangle \mid \prec$ jest izomorficzna z $\omega\}$,
$P_n = \{\langle \mathbb{N}, \prec \rangle \mid \prec$ jest izomorficzna z $\omega^*\}$.
Problem $\{P_y, P_n\}$ jest identyfikowalny.

- *SEQ* jest przeliczalny.
- Zatem przeciwdziedzina uczonego jest przeliczalna.

Lemat

Każdy identyfikowalny problem jest przeliczalny.

Definicja

Niech $\mathcal{I}(P)$ oznacza domknięcie hipotezy P na izomorfizm.
Problem **P** *nazywamy normalnym jeśli dla każdych $P, P' \in$* **P***:*

$$\mathcal{I}(P) \cap \mathcal{I}(P') = \emptyset.$$

Lemat

Tylko normalne problemy są identyfikowalne.

Pytanie

Po co pełne przyporządkowania skoro są zdania egzystencjalne?

Definicja

Zdefiniujmy środowisko d dla $\mathcal{S}$ jako:

$$range(d) = \{\gamma \in L_{sen} \mid \gamma \textit{ jest zdaniem egzystencjalnym } \& \ \mathcal{S} \models \gamma\}.$$

DEFINICJA

Ψ – *uczony; P – hipoteza;* $\mathcal{S} \in P$; $a : Var \longrightarrow |\mathcal{S}|$ *– skończone.*

(σ, a) *jest* **parą zamykającą** *dla* Ψ, $\mathcal{S}$ *i P jeśli:*

1. $dom(a) \supseteq Var(\sigma)$, *gdzie* $Var(\sigma)$ *zbiór zmiennych wolnych w* σ;
2. $\mathcal{S} \models \bigwedge \sigma[a]$;
3. *Dla każdego* $\tau \in SEQ$, *jeśli* $\mathcal{S} \models \exists \bar{x} \bigwedge (\sigma * \tau)[a]$, *gdzie* $\bar{x}$ *zawiera zmienne z* $Var(\tau) - dom(a)$, *to* $\emptyset \neq \Psi(\sigma * \tau) \subseteq P$.

LEMAT

Niech uczony Ψ, hipoteza P oraz $\mathcal{S} \in P$ będą dane.
Jeśli uczony Ψ identyfikuje P na wszystkich środowiskach dla $\mathcal{S}$, to istnieje para zamykająca dla Ψ, $\mathcal{S}$ i P.

DEFINICJA

π-zbiór to zbiór $\forall$ formuł, których zmienne wolne zawierają się w jednym skończonym zbiorze zmiennych.

DEFINICJA

Niech problem **P** *i $P \in$* **P** *będą dane. Denuncjacja dla P w* **P** *to przeliczalny zbiór t zawierający π-zbiory taki, że:*

1. *dla każdej $\mathcal{S} \in P$ oraz pełnego przyporządkowania h do $\mathcal{S}$, istnieje $\pi \in t$ taki, że $\mathcal{S} \models \pi[h]$;*
2. *dla wszystkich $\mathcal{U} \in P' \in$* **P***, gdzie $P' \neq P$, wszystkich pełnych przyporządkowań g do $\mathcal{U}$ i wszystkich $\pi \in t$, $\neg(\mathcal{U} \models \pi[g])$.*

Jeśli każdy element **P** *ma denuncjację w* **P***, to mówimy, że* **P** *jest zadenuncjonowany.*

PRZYKŁAD

Sym $= \{R\}$. Niech $\mathbb{T}$ – teoria liniowych porządków (względem R) z największym albo najmniejszym elementem. Niech $\theta = \exists x \forall y Rxy$. Wtedy $\mathbf{P} = \{MOD(\mathbb{T} \cup \{\theta\}), MOD(\mathbb{T} \cup \{\neg\theta\})\}$ jest zadenuncjonowany.

Denuncjacja dla $MOD(\mathbb{T} \cup \{\theta\})$ w $\mathbf{P}$ to $\{\{\forall x R v_i x | i \in \mathbb{N}\}\}$ zaś dla $MOD(\mathbb{T} \cup \{\neg\theta\})\}$ to $\{\{\forall x R x v_i | i \in \mathbb{N}\}\}$.

1. Jeśli problem **P** jest przeliczalny i jest zadenuncjonowany, to **P** jest identyfikowalny.
2. Każdy identyfikowalny problem jest zadenuncjonowany.

Niech **Sym** $= (R, \bar{0}, s)$.

DEFINICJA

Dla każdego $L \subseteq \mathbb{N}$, P_L klasa struktur takich, że dla każdego n:

1. *jeśli $n \in L$, to istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathcal{S} \models R\bar{n}\bar{p}$;*
2. *jeśli $n \notin L$, to dla każdego $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S} \models \neg R\bar{n}\bar{p}$.*

TWIERDZENIE

Niech $\mathbf{P}_\eta$ – przeliczalny zbiór niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$.

$\mathbf{P}_\eta$ *jest identyfikowalny w par. numerycznym*

$$\iff$$

$\{P_L | L \in \mathbf{P}_\eta\}$ *jest identyfikowalny w par. teorio-modelowym.*

KONIEC

Bibliografię znaleźć można w streszczeniu wystąpienia, na stronie:
www.kognitywistyka.uw.edu.pl